

Table des matières

1	Notions préliminaires et définitions	4
1.1	Équation du mouvement	4
1.1.1	Équation de continuité	4
1.1.2	Les équations des stokes	5
1.1.3	Équations d'Euler	5
1.1.4	Équation de Bernoulli	7
1.2	Les écoulements de fluide	8
1.2.1	Écoulement stationnaire :	8
1.2.2	Écoulement incompressible	9
1.2.3	Écoulement compressible	9
1.2.4	Écoulement parfaits	9
1.2.5	Écoulement réel	10
1.2.6	Écoulement potentiel	10
1.2.7	Écoulement irrotationnel	11
1.3	Viscosité	12
1.4	Ligne de courant	12
1.5	Les trajectoires	13
1.6	La cinématique	14
1.6.1	La Masse volumique (ou la densité)	14
1.6.2	Description Lagrangienne et Eulerienne	14
1.6.3	Théorème de transport de Reynolds	16
1.7	Mécanique	16
1.7.1	Les forces	16
1.7.2	Conservation de Masse	17

1.7.3	Principe de conservation Momentum	18
2	La thermodynamique	19
2.1	Introduction	19
2.2	Le premier principe de la thermodynamique	19
2.3	Deuxième principe de la thermodynamique	20
2.4	L'inégalité de Clausius-Duhem pour la thermoélasticité	21
3	Stabilité non linéaire	23
3.1	La stabilité	23
3.2	Stabilité asymptotique	24
3.3	L'instabilité	24
3.4	Paramètres abstraits	24
3.5	Stabilité non linéaire	25
3.6	Stabilité exponentielle non linéaire	25
3.7	Contrôle initiale des données	26
3.8	Méthode de Lyapunov	27
3.9	Théorème de Lyapunov	28
3.10	Méthode d'énergie	28

Introduction

La mécanique des fluides est un domaine de la physique dédié à l'étude du comportement des fluides (liquides, gaz et plasmas) et des forces internes associées. C'est une branche de la mécanique des milieux continus qui modélise la matière à l'aide de particules assez petites pour relever de l'analyse mathématique mais assez grandes par rapport aux molécules pour être décrites par des fonctions continues.

Elle se divise en deux parties, la statique des fluides qui est l'étude des fluides au repos et la dynamique des fluides, qui est l'étude des fluides en mouvement.

Aujourd'hui, la dynamique des fluides est un domaine actif de la recherche avec de nombreux problèmes non résolus ou partiellement résolus.

Ce mémoire est composé de trois chapitres :

Dans la première chapitre on va donner des Notions préliminaires et définitions avec les équations de mouvement.

Dans la deuxième chapitre on présente la thermodynamique et ses lois.

Dans la troisième chapitre on présente la définition de la stabilité non linéaire et la méthode de Lyapunov avec la méthode d'énergie.

Chapitre 1

Notions préliminaires et définitions

1.1 Équation du mouvement

1.1.1 Équation de continuité

En mécanique des fluides, le principe de conservation de la masse peut être décrit par l'équation de continuité sous plusieurs formes différentes : locale conservative (dérivée en temps normale), locale non conservative (la dérivée en temps suit la particule dans son mouvement), ou intégrale. Suivant les problèmes posés, c'est l'une ou l'autre de ces équations qui pourra être retenue, toutes étant équivalentes.

On note ici :

1. $\rho = \rho(\vec{x}, t)$: la masse volumique du fluide au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant " t ".
2. $\vec{U} = \vec{U}(\vec{x}, t)$: la vitesse d'une particule de fluide se trouvant au point repéré par le vecteur \vec{x} à l'instant " t ".

forme locale

Cette écriture est la plus générale et la plus répandue.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div}(\rho \vec{U}) = 0$$

En faisant intervenir la notion de dérivée particulaire, on a l'écriture équivalente suivante :

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \operatorname{div}(\vec{U}) = 0$$

Forme intégrale

Cette formulation permet l'étude d'un "bloc" de fluide $\Omega(t)$ pouvant éventuellement se déformer au cours du temps.

Elle traduit le fait que la masse du fluide enfermé dans le volume $\Omega(t)$ est constante.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega(t)} \rho(\vec{x}, t) d\Omega(t) = 0$$

1.1.2 Les équations des stokes

En négligeant dans l'équation de Navier-Stokes incompressible stationnaire les termes proportionnels à la masse volumique du fluide $(u \cdot \nabla)u$, on obtient l'équation de Stokes :

$$\begin{cases} -\nu \Delta u + \nabla p = f \\ \operatorname{div} u = 0 \end{cases}$$

Plus la vitesse de l'écoulement est petite en regard des dimensions de Ω et de la valeur de la viscosité, plus le modèle de Stokes est une approximation valable des équations de Navier-Stokes. La différence fondamentale entre les deux équations est que le terme non linéaire en vitesse a disparu, l'équation de Stokes est une équation aux dérivées partielles linéaire

1.1.3 Équations d'Euler

Les différents force qui agissent sur un élément de fluide en mouvement se ramènent à :

- Les forces extérieures (forces de volume).
- Des forces pression (forces de surface).
- Des forces d'inertie.

La loi de Newton du mouvement est comme suite :

$$\sum \vec{F} = m\gamma$$

Pour illustrer le développement des équation qui régissent le mouvement de particules de fluide , on considère pour la simplicité de l'illustration une représentation cartésienne bidimensionnelle suivant la direction (Ox) on a :

$$F_x = m\gamma_x$$

La particule de fluide est représentée en deux position à deux instant t et $t + dt$

$$\gamma_x = \frac{du}{dt}$$

$u(x, y, t)$: La composant de la vitesse vraie avec la position de temps. En négligeant les termes d'ordre supérieur , alors on peut écrire :

$$du = \frac{\partial u}{\partial t}dt + \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy$$

La variation infinitésimales dans la position dx et dy de la particule de fluide sont donnée par les équations de la trajectoire

$$dx = udt \quad \text{et} \quad dy = vdt$$

L'accélération dans la direction x est :

$$\gamma_x = \frac{du}{dt} = \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y}$$

On reconnait le développement de la dérivé particulaire (matérielle) :

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y}$$

soit pour le vecteur accélération :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

La forme vectorielle de $\vec{\gamma}$ est :

$$\vec{\gamma} = \frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F}$$

Cette équation développée par Euler et nommée équation d'Euler .

Le cas où la force de volume \vec{F} dérive d'un potentiel :

$$\vec{F} = -\text{grad } \vec{U}$$

En générale on se trouve dans le champs de pesanteur :

$$U = gh$$

On peut écrire l'équation d'Euler sous la forme :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{v}}{dt} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} + \vec{F} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v} \vec{\nabla} \right) \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \vec{P} + \vec{F} \end{aligned}$$

Equation d'Euler :

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \frac{1}{2} \vec{\nabla} v^2 + \frac{1}{\rho} \vec{\nabla} \vec{P} = \vec{F} + \vec{v} \text{ rot } \vec{v}$$

1.1.4 Équation de Bernoulli

A partir de l'équation d'Euler pour un fluide incompressible et parfait et lorsque les forces de volume dérivent d'un écoulement stationnaire instationnaire :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \text{grad } \vec{U}$$

On rappelle l'identité vectorielle :

$$(\vec{v} \text{ grad}) \vec{v} = \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v}$$

Donc on peut écrire :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{\vec{v}^2}{2} \right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} &= -\frac{1}{\rho} \text{grad } \vec{P} - \text{grad } \vec{U} \\ \iff \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \text{grad} \left(\frac{v^2}{2} \right) + \left(\vec{\nabla} \times \vec{v} \right) \times \vec{v} &= 0 \end{aligned}$$

On rappelle la forme du vecteur tourbillon

$$\vec{\Omega} = \frac{1}{2} \text{rot} \vec{v} = \frac{1}{2} (\vec{\nabla} \times \vec{v})$$

Et dans le cas d'un écoulement stationnaire c'est-à-dire $\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = 0\right)$ alors on peut écrire :

$$\text{grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} = 0$$

On projet cette équation sur un ligne de courant de vecteur unitaire , donc on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} = \vec{s} \text{ grad}$$

Ce qui donne

$$\vec{s} \text{ grad} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) + \vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Comme s et v sont colinéaire :

$$\vec{s} (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \times \vec{v} = 0$$

Ainsi on a :

$$\frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U \right) = Cte$$

Le long d'un ligne de courant est après on a :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + U = Cte$$

Dans ce cas les forces de volume se réduisent le plus souvent à la seule force de pesanteur, on a la force simple de l'équation de Bernoulli pour les fluides incompressibles parfait d'un écoulement stationnaire irrotationnel est :

$$\frac{v^2}{2} + \frac{P}{\rho} + gz = Cte$$

1.2 Les écoulements de fluide

1.2.1 Écoulement stationnaire :

L'écoulement du fluide est permanent ou stationnaire si ses composantes de vitesse sont indépendantes de la variable temps.

1.2.2 Écoulement incompressible

Un fluide est dit incompressible si sa masse volumique est constante c'est à dire ne dépend pas de la pression. D'après l'équation de conservation de la masse on peut écrire :

$$\rho = C^{te} \quad \implies \quad \text{div } \vec{v} = 0$$

Par ailleurs,

$$\text{div } \vec{v} = 0 \quad \iff \quad \frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Un tel écoulement, pour lequel la masse volumique d'une particule fluide est une constante du mouvement, est qualifié d'incompressible. Dans ce cas, ρ peut varier avec la position (les différentes particules fluides peuvent avoir des masses volumiques différentes).

En règle générale, les liquides peuvent en première approximation être considérés comme incompressibles et les écoulements gazeux peuvent être assimilés à des écoulements incompressibles dans la mesure où la vitesse \vec{v} est partout négligeable devant la vitesse du son.

1.2.3 Écoulement compressible

Un fluide est dit compressible lorsque le volume occupé par une masse donnée varie en fonction de la pression extérieure. Les gaz sont des fluides compressibles.

Par exemple, l'air, l'hydrogène, le méthane à l'état gazeux, sont considérés comme des fluides compressibles.

1.2.4 Écoulement parfaits

Soit un système fluide, c'est-à-dire un volume délimité par une surface fermée Σ fictive ou non.

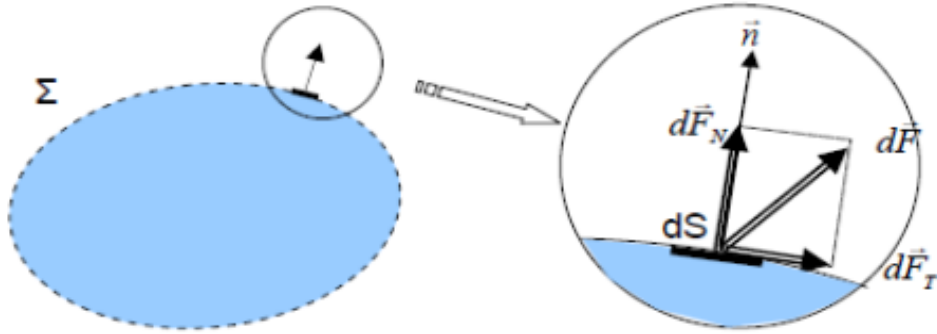


Figure 1.1

Considérons $d\vec{F}$ la force d'interaction au niveau de la surface élémentaire dS de normale \vec{n} entre le fluide et le milieu extérieur.

On peut toujours décomposer $d\vec{F}$ en deux composantes :

- une composante $d\vec{F}_T$ tangentielle à dS .
- une composante $d\vec{F}_n$ normale à dS .

En mécanique des fluides, un fluide est dit parfait s'il est possible de décrire son mouvement sans prendre en compte les effets de frottement. C'est à dire quand la composante $d\vec{F}_T$ est nulle. Autrement dit, la force $d\vec{F}$ est normale à l'élément de surface dS .

1.2.5 Écoulement réel

Contrairement à un fluide parfait, qui n'est qu'un modèle pour simplifier les calculs, pratiquement inexistant dans la nature, dans un fluide réel les forces tangentielles de frottement interne qui s'opposent au glissement relatif des couches fluides sont prise en considération. Ce phénomène de frottement visqueux apparaît lors du mouvement du fluide.

C'est uniquement au repos, qu'on admettra que le fluide réel se comporte comme un fluide parfait, et on suppose que les forces de contact sont perpendiculaires aux éléments de surface sur lesquels elles s'exercent. La statique des fluides réels se confond avec la statique des fluides parfaits.

1.2.6 Écoulement potentiel

Dans la dynamique des fluides, un écoulement est dit potentiel lorsque son champ des vitesses v est dérivé d'un potentiel c'est à dire il existe une fonction scalaire de potentiel des

vitesses φ tel que :

$$v = \nabla \varphi$$

Si le domaine de l'écoulement est simplement connexe, alors il existe une fonction φ appelée potentiel des vitesses, vérifiant

$$\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \varphi$$

Puisque le rotationnel d'un gradient est toujours égal à zéro $\nabla \times \nabla \varphi = 0$, alors un écoulement potentiel est toujours irrotationnel :

$$\nabla \times v = 0$$

Les écoulements potentiels servent le plus souvent à décrire des écoulements de fluides parfaits, c'est-à-dire des écoulements où la viscosité peut être négligée, parce qu'un écoulement irrotationnel le reste tant que la viscosité est négligeable (équation d'Euler avec l'hypothèse que le champ de forces extérieures dérive d'un potentiel).

Si l'écoulement est incompressible, la divergence de v est égale à zéro :

$$\nabla \cdot v = 0$$

Le potentiel des vitesses φ est alors une solution de l'équation de Laplace :

$$\nabla^2 \varphi = 0$$

où ∇^2 est le Laplacien, ou l'opérateur laplacien, parfois aussi noté Δ .

A deux dimensions, les équations des écoulements potentiels sont très simples et peuvent être étudiées avec les outils de l'analyse complexe.

1.2.7 Écoulement irrotationnel

On dit qu'un écoulement est irrotationnel si sa vecteur vitesse vérifie la relation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}} \vec{v} = 0$$

Si le domaine de l'écoulement est dénué de "trous" (simplement connexe), alors il existe une fonction Φ appelée potentiel des vitesses, vérifiant $\vec{v} = \overrightarrow{\text{grad}} \Phi$

1.3 Viscosité

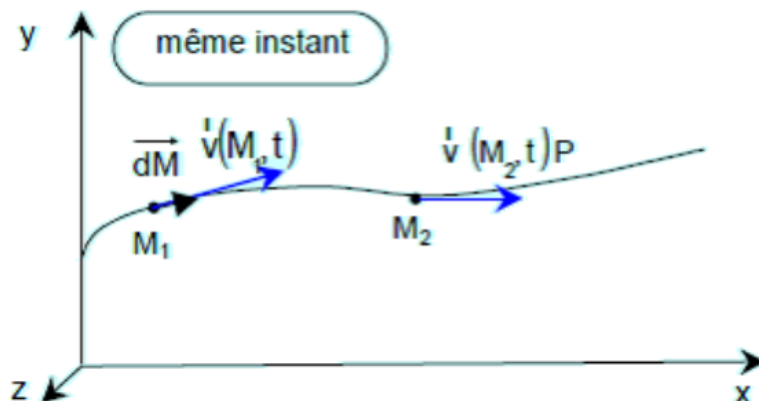
La viscosité peut être définie comme l'ensemble des phénomènes de résistance à l'écoulement se produisant dans la masse d'une matière, pour un écoulement uniforme et sans turbulence. Plus la viscosité augmente, et plus la capacité du fluide à s'écouler facilement diminue, plus l'énergie dissipée par l'écoulement sera importante.

Plusieurs grandeurs physiques caractérisent la viscosité : la viscosité dynamique (celle utilisée le plus généralement), la viscosité cinématique, la seconde viscosité et la viscosité de volume.

1.4 Ligne de courant

On appelle ligne de courant la courbe qui, en chacun de ses points, est tangente au vecteur vitesse local du champ de l'écoulement, son équation différentielle s'écrit :

$$\frac{dx}{u(x, y, z, t)} = \frac{dy}{v(x, y, z, t)} = \frac{dz}{w(x, y, z, t)} \quad \text{à } t \text{ fixé}$$



Ligne de courant à l'instant t (photo instantanée de l'écoulement)

Soit deux équations à trois variables (x, y, z) effet, pour un déplacement dM infiniment petit du point M sur une ligne de courant, on peut écrire

$$\vec{v} \wedge \overrightarrow{dM} = 0$$

ce qui s'écrit scalairement :

$$v \, dz - w \, dy = 0$$

$$w \, dx - u \, dz = 0$$

$$u \, dy - v \, dx = 0$$

posant la valeur commune du rapport de l'équation différentielle encadrée égale à d_α , α désignant un réel quelconque ; les équations paramétriques des lignes de courant passant , à tout instant , par le point $M_0(x_0, y_0, z_0)$ pour $\alpha = 0$ s'écrivent sous la forme :

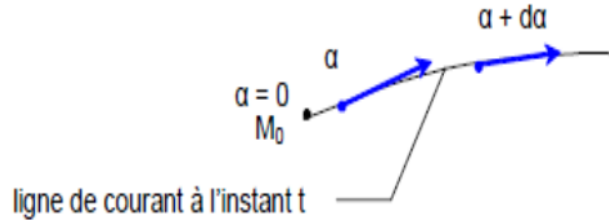


Figure 1.3

$$x = x(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

$$y = y(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

$$z = z(x_0, y_0, z_0, t, \alpha)$$

Les lignes de courant constituent ainsi une famille des courbes à deux paramètres ; elles varient dans l'espaces (à travers le paramètre géométrique α) et dans le temps (par le variable temporelle t).

1.5 Les trajectoires

On appelle trajectoire la courbe décrite au cours du temps par une particule de fluide quelconque du champs de l'écoulement.

En comparant avec les lignes de courant .

Les équations paramétriques différentielles des trajectoires sont définies par :

$$\frac{dx}{dt} = u_x(x, y, z, t)$$

$$\frac{dy}{dt} = u_y(x, y, z, t)$$

$$\frac{dz}{dt} = u_z(x, y, z, t)$$

1.6 La cinématique

1.6.1 La Masse volumique (ou la densité)

La masse volumique, dont le symbole est ρ (rhô), est une propriété caractéristique qui représente la quantité de matière (masse) qui se trouve dans un espace (une unité de volume) donnée. Mathématiquement, la masse volumique est définie comme la masse divisée par le volume, où ρ est la masse volumique, m est la masse, et V est le volume.

$$\rho = \frac{m}{V}$$

1.6.2 Description Lagrangienne et Eulerienne

La cinématique des fluides regroupe les méthodes qui permettent la description du mouvement du fluide sans se préoccuper des causes du mouvement. En mécanique des fluides, et plus généralement en mécanique des milieux continus, on distingue deux descriptions distinctes :

Description Lagrangienne :

Dans le cadre de la description lagrangienne, on suit donc une particule fluide dans son mouvement et on regarde sa position à un instant t . La particule est identifiée par sa position initiale située au point M_0 à l'instant $t = 0$. et \vec{r}_0 est le vecteur position initiale, il ne dépend pas du temps :

$$r_0 = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

On cherche à définir toutes les positions de toutes les particules à chaque instant t matérialisées par le point M .

Les inconnues de Lagrange sont les coordonnées, à l'instant t , de la position

$$r_0(\vec{r}_0, t) = \overrightarrow{OM} = \begin{pmatrix} x(\vec{r}_0, t) \\ y(\vec{r}_0, t) \\ z(\vec{r}_0, t) \end{pmatrix}$$

On plus simplement notée

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Les coordonnées de Lagrange sont le vecteur position initiale \vec{r}_0 et le temps t : la seule variable est donc le temps, les dérivées partielles ou totales sont ainsi identiques (les dérivées partielles n'ont pas vraiment de sens).

Description Eulérienne :

Plus pratique, cette approche est très utilisée en mécanique des fluides, ainsi qu'en mécanique des milieux continus pour de grandes déformations. Pour une position donnée, on observe ce qui rentre et ce qui sort à chaque instant.

La position de la particule fluide étudiée est caractérisée par ses coordonnées dans le système de coordonnées utilisées. Par exemple, en coordonnées cartésiennes :

$$\vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

1.6.3 Théorème de transport de Reynolds

Dans le calcul différentiel , la théorème de transport de Reynolds (également connu sous le nom de théorème de transport de Leibniz-Reynolds), ou en bref le théorème de Reynolds , est une généralisation tridimensionnelle de la règle intégrale de Leibniz appelée différentiation sous le signe intégral . Le théorème est nommé d'après Osborne Reynolds (1842-1912).

Il est utilisé pour refondre des dérivées de quantités intégrées et est utile pour formuler les équations de base de la mécanique du continuum .

Considérons l'intégration de $f = f(x, t)$ sur la région dépendant du temps $\Omega(t)$ qui a la frontière $\partial\Omega(t)$, puis en prenant la dérivée par rapport au temps :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} f \partial V$$

si nous souhaitons déplacer la dérivée à l'intérieur de l'intégrale, il y a deux problèmes : la dépendance temporelle de f , et l'introduction et la suppression de l'espace de Ω en raison de sa frontière dynamique. Le théorème de transport de Reynolds fournit le cadre nécessaire.

formule générale

Le théorème de transport de Reynolds peut être exprimé comme suit :

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega(t)} f \partial V = \int_{\Omega(t)} \frac{\partial f}{\partial t} \partial V + \int_{\partial\Omega(t)} (v^b \cdot n) f \partial A$$

où $n(x, t)$ est le vecteur normal de l'unité pointant vers l'extérieur, x est un point dans la région et est la variable d'intégration, dV et dA sont des éléments de volume et de surface en x ,

et $v^b(x, t)$ est la vitesse de l'élément surfacique (pas la vitesse d'écoulement). La fonction f peut être tensorielle, vectorielle ou scalaire. Notez que l'intégrale sur le côté gauche est une fonction uniquement de temps, et donc la dérivée totale a été utilisée.

1.7 Mécanique

1.7.1 Les forces

Une force permet de modéliser l'action d'un corps sur un autre.

Les effets d'un forces :

Une force est susceptible :

de modifier la vitesse d'un corps (éventuellement de le mettre en mouvement ou le stopper),

de modifier la trajectoire d'un corps (forces qui se compensent),

de déformer ce corps.

Selon les situations la force peut produire l'un de ces effets, deux d'entres eux ou les trois simultanément.

L'effet obtenu dépend de l'orientation de la force, de sa direction, de sa valeur et de la nature du corps qui subit cette force.

1.7.2 Conservation de Masse

La loi de conservation de masse ne peut être formulée qu'en mécanique classique lorsque les échelles d'énergie associées à un système isolé sont beaucoup plus petites que mc^2 où m est la masse d'un objet typique dans le système, mesurée dans le cadre de référence où l'objet est au repos, et c est la vitesse de la lumière .

La loi peut être formulée mathématiquement dans les domaines de la mécanique des fluides et mécanique des milieux continus , où la conservation de la masse est généralement exprimée en utilisant l' équation de continuité , donnée en forme différentielle en tant que

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho v) = 0$$

où ρ est la densité (masse par unité de volume), t est le temps, ∇ est la divergence , et v est le champ de vitesse d'écoulement . L'interprétation de l'équation de continuité pour la masse est la suivante : Pour une surface fermée donnée dans le système, le changement de temps de la masse entourée par la surface est égal à la masse qui traverse la surface, positif si la matière entre et négatif la matière sort. Pour l'ensemble du système isolé, cette condition implique que la masse totale M , la somme des masses de tous les composants du système, ne change pas dans le temps, c'est-à-dire

$$\frac{dM}{dt} = \frac{d}{dt} \int \rho dV$$

où dV est le différentiel qui définit l' intégrale sur tout le volume du système.

1.7.3 Principe de conservation Momentum

L'une des lois les plus puissantes de la physique est la loi de conservation de l'impulsion. La loi de conservation de la quantité de mouvement peut être énoncée comme suit :

Pour une collision entre l'objet 1 et l'objet 2 dans un système isolé , l'impulsion totale des deux objets avant la collision est égale à l'impulsion totale des deux objets après la collision. C'est-à-dire que l'impulsion perdue par l'objet 1 est égale à l'impulsion acquise par l'objet 2.

La déclaration ci-dessus nous indique que l'impulsion totale d'une collection d'objets (un système) est conservée - c'est-à-dire que la quantité totale d'impulsion est une valeur constante ou immuable.

Chapitre 2

La thermodynamique

2.1 Introduction

La thermodynamique est une discipline transversale de la physique, qui traite des transformations de l'énergie sous toutes ses formes.

Elle est fondée sur deux principes fondamentaux :

- le premier principe énonce de façon très générale la conservation de l'énergie : l'énergie peut être stockée par un système sous forme d'énergie interne ou d'énergie cinétique, et peut être échangée avec l'extérieur sous la forme de travail ou de chaleur ;

- le second principe de la thermodynamique traite de l'évolution des systèmes, en introduit la notion essentielle d'entropie.

La conjonction des deux principes permet de définir de façon très rigoureuse des conditions d'équilibre d'un système, c'est-à-dire l'état vers lequel il évoluera en fonction des conditions extérieures qui lui sont imposées. La thermodynamique de l'équilibre est une discipline essentielle pour l'ingénieur, et a des applications dans tous les domaines industriels : toute installation industrielle produit ou consomme de l'énergie, et est le siège de phénomènes physico-chimiques qui évoluent vers un état d'équilibre qui peut être prédit par la thermodynamique.

2.2 Le premier principe de la thermodynamique

Selon le premier principe de la thermodynamique, lors de toute transformation, il y a conservation de l'énergie.

Dans le cas des systèmes thermodynamiques fermés, il s'énonce de la manière suivante :

« Au cours d'une transformation quelconque d'un système fermé, la variation de son énergie est égale à la quantité d'énergie échangée avec le milieu extérieur, par transfert thermique (chaleur) et transfert mécanique (travail). »

Énoncé :

Pour tout système thermodynamique, on peut définir, à une constante près, une fonction U , appelée énergie interne, et ayant les propriétés suivantes :

- U est une fonction d'état (elle ne dépend que des états initiaux et finaux de la transformation).
- U est extensive.
- U se conserve dans un système isolé.

La variation de U au cours d'une transformation infinitésimale d'un système fermé (de composition fixe) vérifie :

$$dE_C + dE_P + dU = \delta W + \delta Q$$

avec :

dE_C : variation de l'énergie cinétique macroscopique.

dE_P : variation de l'énergie potentielle extérieure ou encore opposé du travail des forces conservatives extérieures.

δW : travail des forces du milieu extérieur sur le système (négatif si le travail est résistant, positif s'il est adjuvant).

δQ : quantité de chaleur échangée avec le milieu extérieur au système (par conduction, convection ou rayonnement). La convention choisie ici est de noter positivement un transfert thermique de l'extérieur vers le système.

2.3 Deuxième principe de la thermodynamique

Le deuxième principe de la thermodynamique (également connu sous le nom de deuxième loi de la thermodynamique ou principe de Carnot) établit l'irréversibilité des phénomènes physiques, en particulier lors des échanges thermiques ; Le second principe introduit la fonction d'état entropie : S , usuellement assimilée à la notion de désordre qui ne peut que croître au cours d'une transformation réelle.

Énoncé de la loi :

Toute transformation d'un système thermodynamique s'effectue avec augmentation de l'entropie globale incluant l'entropie du système et du milieu extérieur. On dit alors qu'il y a création d'entropie.

La fonction d'état entropie : S , a été considérée comme une mesure du désordre.

$$\Delta S_{global} = S_{Creation} = \Delta S_{syst} + \Delta S_{ext} \geq 0$$

Dans le cas d'une transformation réversible, la création globale d'entropie est nulle.

Remarques :

- L'entropie d'un système isolé ne peut qu'augmenter ou rester constante puisqu'il n'y a pas d'échange de chaleur avec le milieu extérieur.
- L'entropie d'un système peut diminuer mais cela signifie que l'entropie du milieu extérieur augmente de façon plus importante ; le bilan entropique étant positif, ou nul si la transformation est réversible.
- L'expression « degré de désordre du système » introduite par Boltzmann peut se révéler ambiguë et subjective. En effet on peut aussi définir l'entropie comme une mesure de l'homogénéité du système considéré.

L'entropie d'un système thermique est maximale quand la température est identique en tout point. De même, si on verse un liquide colorant dans un verre d'eau, l'entropie du système coloré sera maximale quand, à la suite du mélange, la couleur du contenu sera devenue uniforme. Tout système isolé, siège d'une agitation aléatoire, tend spontanément à s'homogénéiser de manière irréversible ce qui intuitivement semble contraire à une augmentation du désordre.

Le second principe est un principe d'évolution qui stipule que toute transformation réelle s'effectue avec création d'entropie.

2.4 L'inégalité de Clausius-Duhem pour la thermoélasticité

L'inégalité de Clausius-Duhem peut être exprimée sous forme intégrale

$$\frac{d}{dt} \left(\int_{\Omega} \rho \eta \, dV \right) \geq \int_{d\Omega} \rho \eta \, (u_n - v \cdot n) \, dA - \frac{q \cdot n}{T} dA + \int_{\Omega} \frac{\rho s}{T} \, dV$$

Dans cette équation t , est le temps, Ω représente un corps et l'intégration est sur le volume du corps, $d\Omega$ représente la surface du corps, ρ est la densité de masse du corps, η est l'entropie spécifique (entropie par unité de masse), u_n est la vitesse normale de $d\Omega$, v est la vitesse des particules à l'intérieur Ω , n est l'unité normale à la surface, q est le vecteur de flux de chaleur, s est une source d'énergie par unité de masse, et T est la température absolue. Toutes les variables sont des fonctions d'un point matériel à x au moment t .

Sous forme différentielle, l'inégalité de Clausius-Duhem peut s'écrire

$$\rho \dot{\eta} \geq -\nabla \cdot \left(\frac{q}{T} \right) + \frac{\rho s}{T}$$

où $\dot{\eta}$ est la dérivée temporelle de η et $\nabla \cdot (a)$ est la divergence du vecteur a .

Chapitre 3

Stabilité non linéaire

Commençons par quelques paramètres abstraits . Si nous mettons par Y un scalaire d'un espace de Banach , alors $X = [Y]^n$ désignera l'espace vectoriel de Banach donné par le produit cartésien de Y n fois. Dans cette section nous introduisons quelques définitions de stabilité. Étant donné un flux constant S_b , le concept physique de la stabilité de S_b est lié à le concept d'observabilité .Supposons en tant que la définition qualitative de la stabilité , la proposition suivante :

La stabilité d'un mouvement donné est sa capacité «tenir» (à observer) dans le présence des petites perturbations présentes dans tout système physique . Cette définition nous permet d'introduire la définition correcte de la stabilité d'un donné solution stable S_b aux équations du mouvement qui sera référé à stabilité du mouvement de la base S_b , A l'instant $t = 0$ nous perturbons le mouvement de la base S_b , et appelez $\tilde{S}_0 = \tilde{S}(0)$ les données initiales perturbées qui produisent la mouvement perturbé $\tilde{S}(t)$.Corrélativement ,la perturbation $\tilde{S}_0 - S_b$ à l'instant initiale produit l'évolution dans le temps de la perturbation $\tilde{S}(t) - S_b$. Le question de La stabilité est :

Est-il possible de contrôler $\tilde{S}(t) - S_b$ dans une norme spatiale donnée $\|\cdot\|_X$, pour $t \in (0, \infty)$ à condition que $\tilde{S}_0 - S_b$ soit suffisamment petit dans la même norme $\|\cdot\|_X$?

3.1 La stabilité

Le mouvement S_b est dit stable dans le fixe norme $\|\cdot\|_X$ en ce qui concerne les données initiales si et seulement si pour tout les nombres $\epsilon > 0$, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout les

perturbations initiales $\tilde{S}_0 - S_b$ ayant norme dans X inférieure à δ , c'est-à-dire $\|\tilde{S}_0 - S_b\|_X < \delta$, les perturbations correspondantes $\tilde{S}(t) - S_b$ dans la norme $\|\cdot\|_X$ reste inférieure à ϵ , c'est-à-dire $\|\tilde{S}(t) - S_b\|_X < \epsilon$ pour tout t .

Les flux de base qui vérifiant la stabilité non linéaire sont parfois appelés stables dans signifie, mais cette notation n'est pas généralement acceptée.

3.2 Stabilité asymptotique

la Stabilité est asymptotique si les perturbations reviennent à zéro comme le temps passe à l'infini

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\tilde{S}(t) - S_b\|_X = 0$$

Nous disons que le mouvement de base est asymptotiquement stable.

3.3 L'instabilité

On dit qu'un mouvement $S_b(t)$ est instable dans le X -norme si elle n'est pas stable, c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$, une séquence de données $\{S_i(0)\}$ approchant S_b , et une séquence à l'instant t_i , tels que si $\|S_i(t) - S_b\|_X \geq \epsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$.

Sous des hypothèse de stabilité non linéaire, si nous pouvons contrôler physiquement cela à temps initial la norme dans X de $\tilde{S}_0 - S_b$ est inférieure à δ , alors le flux de base S_b sera également observable expérimentalement dans la classe des flux perturbé ayant données initiales suffisamment proches de S_b .

3.4 Paramètres abstraits

On note f une fonction vectorielle de classe C^1 définie dans l'espace vectoriel de Banach X , avec des valeurs dans X ,

$$f : v \in X \longmapsto f(v) \in X$$

Nous étudions l'abstrait problème d'évolution autonome

$$\begin{cases} \frac{dV}{dt} = f(V) \\ V(0) = V_0 \end{cases} \quad (3.1)$$

Une valeur $V_b \in X$ est être un point critique de **3.1** si $f(V_b) = 0$. Notez que l'existence de points critiques déduit la connaissance de la stabilité solutions

$$V(t, V_b) = V_b$$

S'il existe un point critique pour **3.1**, alors par une simple soustraction nous en déduire que la fonction :

$$W(t, W_0) = V(t, V_0) - V_b \in X$$

avec

$$W_0 = V_0 - V_b$$

résout le problème

$$\begin{cases} \frac{dW}{dt} = g(W) \\ W(0) = W_0 \end{cases} \quad (3.2)$$

Où

$$g(W) = f(V_b + W) - f(V_b)$$

Dans notre cas, nous étudions directement la défférence des mouvement, donc S_b est le point critique de **3.2**, et vérifie : $W_b(t) = W(t, 0)$

3.5 Stabilité non linéaire

La solution nulle $W_b(t) = 0$ à **3.2** est dit non-linéaire dans la norme X si

$$\forall \epsilon > 0 \quad \exists \delta(\epsilon) > 0 : \|W_0\|_X < \delta \implies \|W(t, W_0)\|_X < \epsilon, \quad \forall t \in (0, \infty) \quad (3.3)$$

Une solution $W_b(t) = 0$ à **3.2** est dite instable dans la norme X si elle n'est pas stable ; c'est-à-dire s'il existe $\epsilon > 0$, une séquence de données initiales $\{W_i\}$ approchant à zéro, et une séquence d'instant t_i ; tels que $\|W(t_i, W_i)\|_X \geq \epsilon$ pour tout $i \in \mathbb{N}$, la différence entre la dépendance continue et la stabilité réside dans le intervalles de temps $(0, T)$ et $(0, \infty)$ où le contrôle se produit.

3.6 Stabilité exponentielle non linéaire

La solution $W_b(t, 0) = 0$ à **3.2** est dit non-stable inconditionnellement stable dans la norme X si il y a un contrôle des perturbations en termes de données initiales la norme X , aussi grande soient les perturbations au moment initial dans le X -norme.

La solution $W_b(t, 0) = 0$ à 3.2 est dite indépendamment stable dans la norme X si elle est stable et pour toute donnée initiale W_0 elle tient

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|W(t; W_0)\|_X = 0 \quad \quad \quad \|W(t; W_0)\|_X < c \exp^{-\beta t} \quad \text{respectivement}$$

Avec c, β constantes appropriées, β est la constante de décroissance temporelle.

3.7 Contrôle initiale des données

En réalité, nous pouvons prescrire des données initiales loin de l'état stable S_b , et nous pouvons souhaiter étudier ce qui se passe dans ces circonstances. Les définitions de la stabilité non linéaire ne disent rien sur le contrôle des solutions avec des données initiales finies. En effet, dans les phénomènes non linéaires avec grande donnée initiale, une solution $S(t)$ peut perdre son contrôle à partir des données initiales, même si S_b est non linéaire (pour les petites perturbations initiales). Cette situation se produit fréquemment et il constitue le véritable écart entre linéaire et la stabilité non linéaire; à ce jour il semble qu'il n'y a pas de rigoureux; les définitions de ce phénomène, nous introduisons ici deux nouvelles définitions :

Définition 1 :

On dit qu'une perturbation $W(t, W_0)$ à l'état de repos S_b est contrôlée par des données initiales dans le rang I_{2a}/I_a si et seulement si, pour tout W_0 satisfaisant

$$a < \|W_0\|_Y < 2a \quad (3.4)$$

La solution $W(t, W_0)$ est toujours bornée, donc qu'il existe une constante $\alpha = \alpha(a) > 0$ tels que

$$\|W(t; W_0)\|_X \leq \alpha \quad \quad \forall t > 0. \quad (3.5)$$

Définition 2 :

On dit que l'état de repos perd le contrôle de l'état initial s'il existe un nombre positif a et des données initiales W_0 satisfaisant 3.4 telle que la solution correspondante $W(t, W_0)$ n'est pas contrôlée par l'initiale des données; alors qu'à chaque fois que $\alpha > 0$; il existe $T > 0$ tel que la solution $W(t, W_0)$ de la problème 3.2 Avec les données initiales satisfaisant 3.4 vérifie l'inégalité

$$\|W(t; W_0)\|_X(T) \geq \alpha \quad (3.6)$$

3.8 Méthode de Lyapunov

Nous commençons par les paramètres abstraits 3.1. Soit V_b un point critique de 3.1 à savoir

$$f(V_b) = 0 \quad (3.7)$$

La stabilité étudie l'évolution dans le temps de la perturbation dans une norme prescrite $|\cdot|_X$

$$\begin{cases} W(t; V_0 - V_b) = V(t; V_0) - V_b \\ W(0; V_0 - V_b) = V_0 - V_b \end{cases}$$

Définition :

Soit $W \in X$ une solution à 3.2 . Une fonction douce

$$F : W \in X \rightarrow F(W) \in R$$

Est dit être un fonctionnel de Lyapunov pour la solution nulle $W_b = 0$ dans l'espace abstrait X si :

1. Il est défini positif dans le voisinage de l'origine , i.e

$$F(0) = 0 \quad F(W) > 0 \quad W \neq 0 \quad \forall W \in I$$

2. Il est continu au voisinage de 0 de rayon R ; i.e

$$\forall R > \epsilon > 0 \quad ; \exists \delta > 0 : \quad \|W\|_X < \delta \rightarrow F(W) < \epsilon$$

3. Il diminue le long de la solution à 3.2 ; i.e

$$\frac{dF(W(t))}{dt} \leq 0 \quad ; \forall t > 0 \quad (3.8)$$

3.9 Théorème de Lyapunov

- S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système 3.2, la solution nulle $W_b(t; 0)$ à 3.2 est stable dans la norme X .
- S'il existe une fonction de Lyapunov pour le système 3.1, alors la solution stationnaire $V(t, V_b) = V_b$ à 3.1.

Remarque

Pour les mouvements stables de l'espace fixe X ils existe des infinis fonctionnalités de Lyapunov. Un problème réside dans la construction du plus fonctionnel de Lyapunov F .

3.10 Méthode d'énergie

La méthode de l'énergie prend comme point de départ le problème de la valeur initiale décrit dans 3.2, le «système de perturbations». Il déduit fonctionne de Lyapunov en opérant sur le système 3.2. Une opération typique de cette méthode est la multiplication de 3.2 par une fonction de W dans X , dont est généralement un espace de Hilbert $X = H$ où 3.2 est défini.

La méthode de l'énergie est habituellement utilisée pour étudier la stabilité non linéaire de écoulements visqueux incompressibles, régis par des systèmes paraboliques "généralisés", Généralement la «méthode énergétique» n'utilise pas d'énergie physique.

Soit v, p une solution aux équations instationnaires de Navier-Stokes dans un domaine fixe Ω qui satisfait

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t v + v \cdot \nabla v - v \Delta v = -\nabla p + f \\ \nabla \cdot v = 0 \quad (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ v(x, 0) = v_0(x) \quad x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = v_\Sigma \end{array} \right. \quad (3.9)$$

avec f étant une force externe, v_Σ étant une vitesse limite, et v_0 la donnée premier.

Dans ce cas, un point critique de 3.9 représente une solution aux équations de Navier-Stokes stables données par

$$\begin{cases} v_b \cdot \nabla v_b = -\nabla p_b + f \\ \nabla \cdot v_b = 0, & x \in \Omega \\ v|_{\partial\Omega} = v_\Sigma \end{cases} \quad (3.10)$$

avec la même force externe et la même vitesse limite. Ici nous souhaitons étudier la stabilité avec respect des données initiales $v_0 = v_b + u_0$. Ensuite, la perturbation $u = v - v_b$ satisfait l'équation :

$$\begin{cases} \partial_t u + v \cdot \nabla v - v \Delta u = -\nabla (p - p_b) - u \cdot \nabla v_b \\ \nabla \cdot v_b = 0 & (x, t) \in \Omega \times (0, \infty) \\ u(x, 0) = u_x(0) & x \in \Omega \\ u|_{\partial\Omega} = 0 \end{cases} \quad (3.11)$$

En multipliant [3.11](#) par u et en intégrant sur Ω , on déduit l'équation d'énergie suivante

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{2} dx = - \int_{\Omega} |\nabla u|^2 - \int_{\Omega} u \cdot \nabla v_b u dx \quad t \in (0, \infty) \quad (3.12)$$

A partir de (2.2.12), on peut facilement prouver un théorème de dépendance continue pour classes de régularité appropriées de solutions. En général, rien ne peut être dit à propos de la stabilité de la solution stationnaire v_b de [3.11](#), sauf que les perturbations $u(x, t)$ dépendent de la taille de v_b . De plus, il est clair que un candidat fonctionnelle de Lyapunov $F(u)$ coïncide avec la norme spatiale L^2 - norme de u $\|u\|_{L^2}$ deviendra un fonctionnel de Lyapunov pour le système [3.11](#) si :

$$-v \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx = \int_{\Omega} u \cdot \nabla v_b u dx \leq 0 \quad (3.13)$$

Conclusion

Dans ce travail, nous introduisons quelques définitions et méthodes qualitatives utile dans l'étude de la stabilité non linéaire par rapport aux données initiales d'un mouvement fluide de base. Le but est de rappeler l'énergie méthode utilisées pour étudier les propriétés distinctives de la stabilité non linéaire pour les fluides incompressibles (équations paraboliques) et pour les corps élastiques (équations hyperboliques), respectivement, et donner un aperçu des résultats obtenu dans notre travail.

.

Bibliographie

- [1] Ben Hamoduda Riadh, Notions de Mécanique des Fluides, cours et exercices corrigés. Centre de Publication Universitaire, Tunis 2008.
- [2] M. Padla, Asymptotic Stability of Steady Compressible fluids Dept. of Mathematics, University of Ferrara, Italy.
- [3] Christophe Ancey, Mécanique des fluides, Ecole polytechnique fédérale de Lausanne Ecublens, 26 juin 2010
- [4] Damou Merzak. MSC.PHD. Mécanique des fluides, réimpression 1996.
- [5] Sakir Amiroudine et Jean-Luc Battaglia, Mécanique des Fluides, Dunod, Paris, 2011.
- [6] Patrick Huerre, Mécanique des fluides Cours Département de Mécanique, FRANCE, 1998.